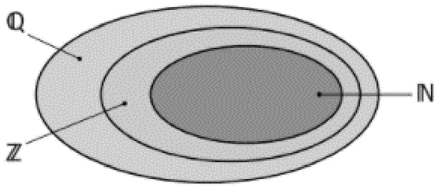
1. Rationale Zahlen



➢ Menge der rationalen Zahlen

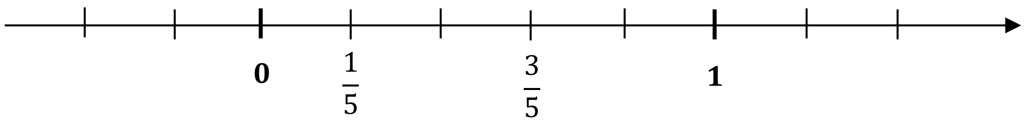
- Die positiven und negativen Bruchzahlen bilden zusammen mit der Null die Menge der rationalen Zahlen:
  $\mathbb{Q} = \left\{ \dots ; -\frac{17}{9}; \dots ; -1; \dots ; -\frac{1}{2}; \dots ; 0; \dots ; 0{,}5; \dots ; 1; \dots ; \frac{18\,273}{7}; \dots \right\}$.
- Dabei kann jeder Quotient $z : n$ zweier ganzer Zahlen ($n \neq 0$) als Bruchzahl $\frac{z}{n}$ angegeben werden und umgekehrt. z ist der Zähler und n der Nenner eines Bruches.

➢ Bruchteile und Anteile

- Der Bruch $\frac{z}{n}$ bezeichnet den Anteil, den ein Bruchteil vom Ganzen ausmacht. Man teilt das Ganze also in n Teile und nimmt z davon.
  z. B. $\frac{3}{4}$ ist der Anteil, den der Bruchteil 45 Minuten von der ganzen Stunde (60 Minuten) ausmacht.
- Ein Anteil steht stets ohne Einheit.

➢ Anordnung / Vergleichen

z.B. $\frac{1}{5} = 1 : 5$, also ein Ganzes, welches in 5 Teile zerlegt wurde.
$\frac{1}{5}$ entspricht somit einer Zahl zwischen 0 und 1 auf der Zahlengeraden, welche viermal soweit von der 1 wie von der 0 entfernt ist.



- Eine Bruchzahl ist umso größer, je weiter rechts sie auf der Zahlengeraden dargestellt wird.
- Um Brüche zu vergleichen, kann man sie
  - ⇨ auf den gleichen Nenner bringen (und sie anhand der Zähler vergleichen: größerer Zähler ⇒ größere Zahl)
  - ⇨ auf den gleichen Zähler bringen (und sie anhand der Nenner vergleichen: kleinerer Nenner ⇒ größere Zahl)
  - ⇨ sie anhand einer anderen Zahl vergleichen (z.B. $\frac{9}{10} < 1$ und $\frac{13}{12} > 1 \Rightarrow \frac{9}{10} < \frac{13}{12}$)
- Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV): Um das kgV der Nenner von $\frac{13}{24}$ und $\frac{17}{42}$ zu ermitteln,
  - ⇨ werden die Nenner in Primfaktoren zerlegt.
  - ⇨ Das kgV enthält dann alle Faktoren der ersten Zahl und diejenigen Faktoren, die in der zweiten Zahl zusätzlich vorkommen.

z. B.
$$\left.\begin{array}{l} 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \\ 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \end{array}\right\} \text{kgV}(24; 42) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 168$$

➢ Erweitern und Kürzen

- Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl e ($e \neq 0$) erweitert, indem sowohl sein Zähler als auch sein Nenner mit e multipliziert wird.

$$\frac{z}{n} = \frac{e \cdot z}{e \cdot n}$$

z.B. $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$ und $\frac{3}{6} = \frac{3 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{12}{24}$ also gilt $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{12}{24}$

- Umgekehrt wird ein Bruch mit einer natürlichen Zahl k ($k \neq 0$) gekürzt, indem sein Zähler und Nenner durch k dividiert werden.

$$\frac{z:k}{n:k} = \frac{z}{n}$$

z.B. $\frac{50}{100} = \frac{50:10}{100:10} = \frac{5}{10}$ und $\frac{5}{10} = \frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}$ also gilt $\frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Unechte und gemischte Brüche

- Ist der Zähler eines Bruchs größer als sein Nenner, nennt man ihn „unechter Bruch". Man kann ihn als gemischten Bruch schreiben.

z. B. $\frac{18}{7} = (14+4):7 = 14:7 + 4:7 = 2 + \frac{4}{7} = 2\frac{4}{7}$

- Ein gemischter Bruch kann in einen Bruch umgerechnet werden.

z. B. $3\frac{1}{4} = \frac{3\cdot 4+1}{4} = \frac{13}{4}$

Dezimalbrüche

- Ein Bruch wird in einen Dezimalbruch umgewandelt, indem der Nenner durch Erweitern bzw. Kürzen auf eine Zehnerpotenz gebracht wird:
z.B. $\frac{4}{10} = 0{,}4$ $\frac{1\,234}{100} = 12{,}34$ $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4} = \frac{3\cdot 25}{4\cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$
- Die Ziffern rechts vom Komma geben dabei Zehntel, Hundertstel, Tausendstel… an.
- Die Anzahl der Nullen im Nenner entspricht der Anzahl der Nachkommastellen (Dezimalen).

Dezimalbrüche runden

Dezimalbrüche werden anhand der Nachkommastellen nach denselben Regeln wie bei den natürlichen Zahlen gerundet. Das heißt bei 0-4 rechts von der Rundungsstelle abrunden und bei 5-9 aufrunden.

z. B. 587,499 ≈ 587 (gerundet auf Einer) oder 587,499 ≈ 587,5 (gerundet auf Zehntel)

Periodische Dezimalbrüche

Beim Umwandeln eines Bruchs in einen Dezimalbruch, kann die Division…

- …abbrechen. Es liegt ein <u>endlicher</u> Dezimalbruch vor.
- …unendlich und wiederholend fortlaufen. Es liegt ein nicht endlicher, periodischer Dezimalbruch vor. Wiederholende Ziffern oder Zifferngruppen nennt man <u>Periode</u>.

Beginnt die Periode nach dem Komma,

ist der Dezimalbruch <u>rein periodisch</u>, z.B. $\frac{1}{3} = 1:3 = 0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3}$

ansonsten <u>gemischt periodisch</u>. z.B. $\frac{1}{6} = 1:6 = 0{,}16666\ldots = 0{,}1\overline{6}$

- **Dezimalbrüche und Zehnerpotenzen**

Wird ein Dezimalbruch mit 10 (100; 1000; ...) multipliziert, so wird das Komma um eine (zwei; drei; ...) Stellen nach rechts gerückt.

Wird ein Dezimalbruch durch 10 (100; 1000; ...) dividiert, so wird das Komma um eine (zwei; drei; ...) Stellen nach links gerückt.

Ist die Zehnerstufenzahl in Potenzschreibweise gegeben, so gilt: Das Komma wird um so viele Stellen gerückt, wie die Zahl im Exponenten der Zehnerpotenz angibt.

Beispiel: $0{,}125 \cdot 100 = 0{,}125 \cdot 10^{2} = \underbrace{12}_{\text{2 Stellen}}{,}5$

2. Rechnen mit rationalen Zahlen

- **Addition und Subtraktion von Brüchen**

- Gleichnamige Brüche

Brüche heißen gleichnamig, wenn sie den gleichen Nenner besitzen. In diesem Fall gilt:
Gleichnamige Brüche werden addiert/subtrahiert, indem ihre Zähler addiert/subtrahiert werden und der gemeinsame Nenner beibehalten wird.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \text{ und } \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

z.B. $\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$ $\quad \frac{7}{3}-\frac{4}{3}=\frac{3}{3}=1$

- Ungleichnamige Brüche

Brüche mit unterschiedlichen Nennern werden zunächst durch Erweitern oder Kürzen auf den gleichen Nenner gebracht (gleichnamig) und anschließend wie oben beschrieben addiert oder subtrahiert.
Um zwei Brüche gleichnamig zu machen, nutzt man den Hauptnenner. Dieser ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der beiden Nenner.

z.B. $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{5}{2\cdot3}+\frac{7}{2\cdot2\cdot2}=\frac{5\cdot2\cdot2}{2\cdot3\cdot2\cdot2}+\frac{7\cdot3}{2\cdot2\cdot2\cdot3}=\frac{20}{24}+\frac{21}{24}=\frac{41}{24}$

Das kgV von 6 und 8 ist also 24.

- Gemischte Brüche

Gemischte Brüche bestehen aus einer ganzen Zahl und einer Bruchzahl. Beim Addieren und Subtrahieren können die ganze Zahl und die Bruchzahl getrennt voneinander verrechnet oder in unechte Brüche umgerechnet werden. Dazu werden die Bruchzahlen zunächst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht. Das Ergebnis muss sinnvoll gekürzt und zusammengefasst werden.

z.B. $1\frac{3}{7}+6\frac{2}{7}=7\frac{5}{7}$ $\quad 6\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}=3\frac{1}{3}$ $\quad 6\frac{1}{3}-3\frac{2}{3}=\frac{19}{3}-\frac{11}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$

Beim letzten Beispiel kann auch der „Ausleihtrick“ angewendet werden: $6\frac{1}{3}-3\frac{2}{3}=5\frac{4}{3}-3\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$

- Dezimalbrüche

Dezimalbrüche werden stellenwertgerecht addiert bzw. subtrahiert. Sie werden „Komma unter Komma“ untereinandergeschrieben und anschließend schriftlich addiert bzw. subtrahiert.

z.B. 654,69 – 345,312 = 309,378 (siehe NR ⇨)

NR:
```
  654,690
- 345,312
= 309,378
```

Multiplikation und Division von Brüchen mit ganzen Zahlen

- Bruch mal ganze Zahl

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit einer ganzen Zahl c multipliziert, indem der Zähler a mit c multipliziert und der Nenner b beibehalten wird: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

z.B. $\frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = \frac{9 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{45}{10} = 4{,}5$

- Bruch geteilt durch ganze Zahl

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird durch eine ganze Zahl c $(c \neq 0)$ dividiert, indem der Nenner b mit c multipliziert und der Zähler a beibehalten wird: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$

z.B. $\frac{9}{2} : 3 = \frac{9}{2 \cdot 3} = \frac{9}{6} = \frac{9:3}{6:3} = \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10} = 1{,}5$

Multiplikation und Division von zwei Brüchen

- Multiplikation

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

z.B.: $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10} = 0{,}9$

- Division

Werden in einem Bruch Zähler und Nenner vertauscht, so erhält man den Kehrbruch.
Beispiel: $\frac{5}{3}$ ist der Kehrbruch von $\frac{3}{5}$
Statt durch einen Bruch zu dividieren, wird mit dem Kehrbruch multipliziert:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \text{ (mit b, c, d} \neq 0.)$$

z.B.: $\frac{3}{2} : \frac{5}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10} = 0{,}9$

Potenzen mit negativen Exponenten

Für Potenzen mit einem negativen Exponenten gilt: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = 1 : \frac{a^n}{b^n} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = 1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^n$

z.B. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$ $\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2^2}{3^2}} = 1 : \frac{2^2}{3^2} = 1 \cdot \frac{3^2}{2^2} = 1 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$

Doppelbrüche

Einen Bruch, bei dem der Zähler und/ oder der Nenner auch ein Bruch ist, nennt man Doppelbruch.

Man berechnet Doppelbrüche folgendermaßen: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen

- Multiplikation

Vorgehensweise:
1. Zunächst werden die Dezimalzahlen ohne Berücksichtigung der Kommas multipliziert.
2. Im Ergebnis wird das Komma um die Summe der Anzahl beider Nachkommastellen nach links verschoben.

z.B. $0{,}\underline{2} \cdot 1{,}\underline{6} = 0{,}\underline{32}$ NR: $2 \cdot 16 = 32$
$1{,}\underline{23} \cdot 0{,}\underline{03} = 0{,}\underline{0369}$ NR: $123 \cdot 3 = 369$

Durch eine gegensinnige Kommaverschiebung kann die Rechnung oft vereinfacht werden.
z.B. $0{,}025 \cdot 4\,000 = 25 \cdot 4 = 100$

- Division

Das Komma wird gleichsinnig um so viele Stellen verschoben, bis der Divisor eine ganze Zahl ist. Dann kann wie gewohnt dividiert werden. Das Komma wird im Ergebnis gesetzt, sobald in der Nebenrechnung die erste Nachkommastelle nach unten wandert.
z.B.: $1{,}518 : 1{,}2 = 15{,}18 : 12 = 1{,}265$ (siehe NR ⇨)

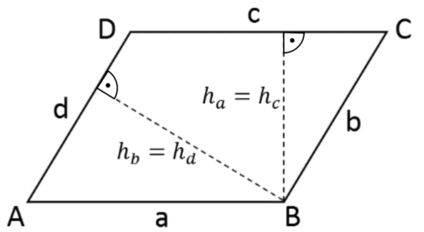
```
15,18 : 12 = 1,265
-12
  3 1
- 24
   78
  -72
    60
   -60
     0
```

3. Flächen- und Oberflächeninhalte

Parallelogramm

Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.

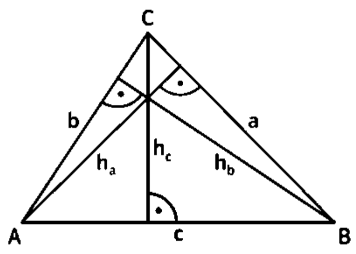
Der Abstand paralleler Seiten heißt Höhe des Parallelogramms. Jedes Parallelogramm hat zwei Höhen h_a und h_b:



Für den Flächeninhalt gilt: $A_{Parallelogramm} = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

Dreieck

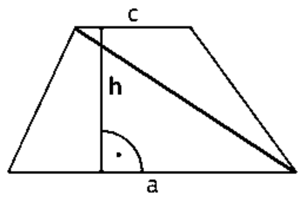
Für die Fläche des Dreiecks gilt: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$
g ist dabei die Grundseite und h die entsprechende Höhe. Im Dreieck heißt der Abstand einer Dreiecksecke von der gegenüberliegenden Seite Höhe des Dreiecks.
Da das Dreieck drei Seiten und drei Höhen besitzt, gilt:



$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

Trapez

Ein Trapez ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten. Die beiden parallelen Seiten heißen Grundseiten des Trapezes, die anderen beiden Seiten Schenkel des Trapezes.



Den Abstand der Grundseiten nennt man Höhe h des Trapezes. Für den Flächeninhalt gilt:

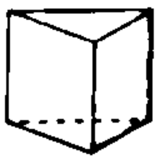
$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

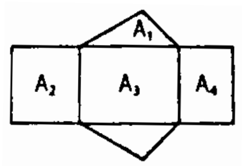
Netz- und Oberflächeninhalt

Der Flächeninhalt des Netzes ist jeweils der **Oberflächeninhalt des Körpers**.

- Prisma
  Ein Körper, dessen Grund- und Deckfläche parallele und deckungsgleiche Vielecke (Dreiecke, Vierecke, Fünfecke usw.) sind und dessen Seitenflächen Rechtecke sind, heißt gerades Prisma.
  z.B. dreiseitiges Prisma Netz des Prismas

$$A_{Prisma} = 2 \cdot A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

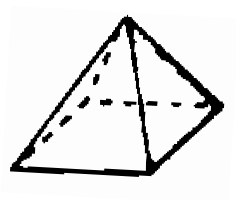


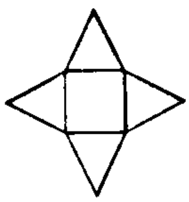


Zudem gilt: Ist G der Inhalt der Grundfläche (hier A_1) und M der Inhalt der Mantelfläche (hier $A_2 + A_3 + A_4$), so berechnet man den Oberflächeninhalt mit $\mathbf{O = 2 \cdot G + M}$ und $\boldsymbol{M = U \cdot h}$, wenn U der Umfang der Grundfläche und h die Höhe des Prismas ist.

- Pyramide
  Eine Pyramide hat als Grundfläche ein Vieleck. Die Seitenflächen sind Dreiecke.
  z.B. vierseitige Pyramide Netz der Pyramide

$$A_{Pyramide} = A_{Quadrat} + 4 \cdot A_{Dreieck}$$





4. Volumen

➢ Volumen und Volumeneinheiten

Körper haben das gleiche Volumen, wenn sie sich in gleich viele gleich große Teilkörper zerlegen lassen. Übliche Volumeneinheiten sind Einheitswürfel mit Kantenlänge 1mm, 1cm, 1dm oder 1m.

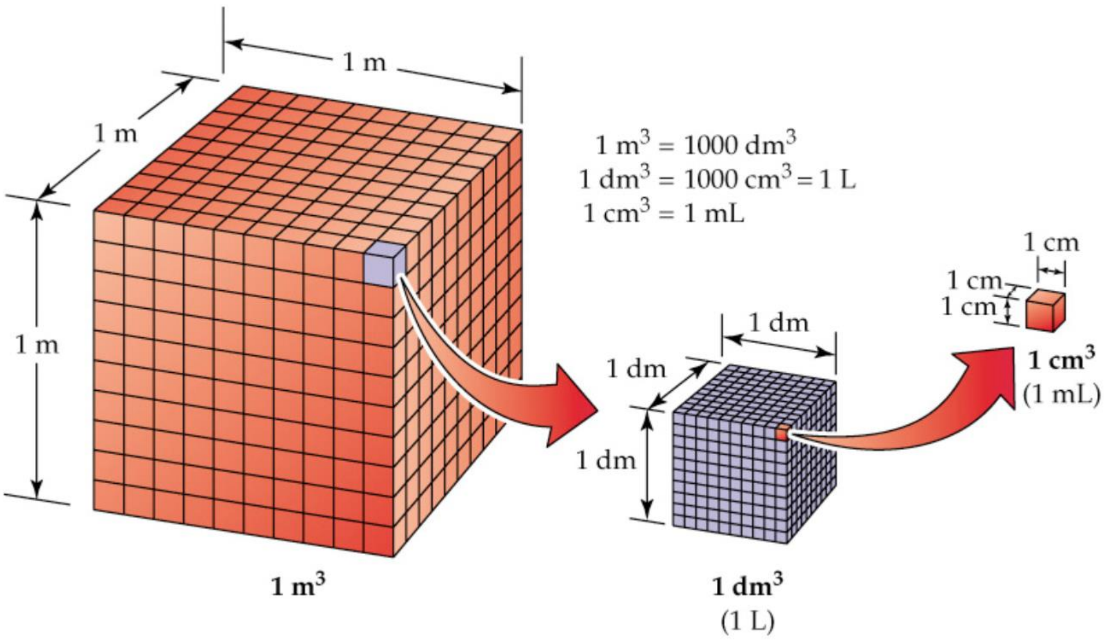
Kantenlänge	Volumen	Sprechweise	Typische Körper
1 mm	1 mm^3	Kubikmillimeter	Stecknadelkopf
1 cm	1 cm^3	Kubikzentimeter	Spielwürfel
1 dm	1 dm^3	Kubikdezimeter	Milchtüte
1 m	1 m^3	Kubikmeter	Raum unter einem Tisch

Auch andere Längeneinheiten können durch ein „hoch 3" als Volumeneinheit verwendet werden. Volumen von Flüssigkeiten werden auch als Liter (l) bzw. Milliliter (ml) angegeben.
1l ist dabei 1dm^3 und 1 ml ist 1cm^3.

➢ Umrechnung von Volumeneinheiten

$$1\,m^3 \underset{\cdot 1000}{\overset{:1000}{\rightleftarrows}} 1\,dm^3 = 1\,\ell \underset{\cdot 1000}{\overset{:1000}{\rightleftarrows}} 1\,cm^3 = 1\,m\ell \underset{\cdot 1000}{\overset{:1000}{\rightleftarrows}} 1\,mm^3$$

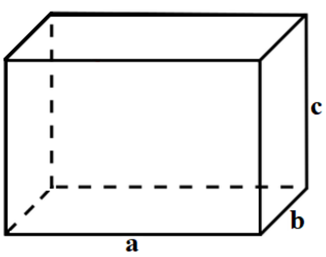
Die Umwandlungszahl bei benachbarten Volumeneinheiten ist 1000, da z. B. in einen Einheitswürfel mit der Kantenlänge 1 dm insgesamt $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ Einheitswürfel mit der Kantenlänge 1 cm passen.

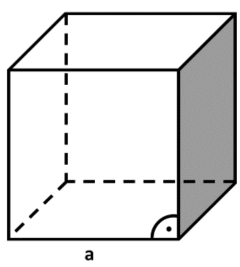


Quelle: http://www.bs-wiki.de/mediawiki/index.php?title=Volumen

➢ Volumen des Quaders

Für das Volumen V eines Quaders bzw. Würfels gilt: $V_{Quader} = \,Länge \cdot Breite \cdot Höhe$





$V_{Quader} \;=\; a \cdot b \cdot c$

$V_{Würfel} \;=\; a \cdot a \cdot a \;=\; a^3$

5. Prozentrechnung, Daten, Diagramme

- **Relative Häufigkeit**

Die jeweilige Anzahl bezeichnet man als absolute Häufigkeit, die zugehörigen Anteile an der Gesamtzahl als relative Häufigkeit.

Es gilt: $\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtanzahl der Durchführungen}}$.

Das Ergebnis kann als Bruch oder in Prozent angegeben werden: z.B. $\frac{56}{100} = 56\,\%$.

Prozent ist die Abkürzung für Hundertstel. Kleinere Anteile werden auch in Promille, was eine Abkürzung für Tausendstel ist, angegeben.

- **Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert**

Beim Prozentrechnen werden die drei Fachbegriffe Grundwert GW, Prozentwert PW und Prozentsatz PS verwendet.

- Der Grundwert GW ist das Ganze, dessen Anteile verglichen werden. Man rechnet $\boldsymbol{GW = \frac{PW}{PS}}$
- Der Prozentwert PW ist die Anzahl oder Größe, die ein Teil des Ganzen ist. Man rechnet $\boldsymbol{PW = GW \cdot PS}$
- Der Prozentsatz PS gibt den Anteil der Anzahl oder Größe am Ganzen an.
  Man berechnet daher den Prozentsatz, indem man den Prozentwert durch den Grundwert dividiert:

$$\boldsymbol{PS = \frac{PW}{GW}}$$

z. B. In der letzten Schulaufgabe erhielten 7 von 25 Schülern die Note 2, das sind $\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 28\%$

- **Arithmetisches Mittel**

Das arithmetische Mittel (auch Durchschnitt oder Mittel) wird berechnet, indem alle Werte addiert werden und die Summe dann durch die Gesamtzahl an Werten dividiert wird. z.B. $(3 + 5 + 6 + 2) : 4 = 4$

- **Diagramme**

Anteile lassen sich gut durch Diagramme veranschaulichen.
Beim Kreisdiagramm entspricht die Größe des Mittelpunktwinkels dem jeweiligen Anteil.
Beim Streifendiagramm entspricht die Länge der Abschnitte dem jeweiligen Anteil.
Beim Säulendiagramm entspricht die Höhe der Säulen dem jeweiligen Anteil.
Hinweis: Achte bei Diagrammen immer auf die Beschriftung der Achsen oder ob nur ein kleiner Ausschnitt dargestellt wird.