1. Rechnen mit natürlichen Zahlen

- **Zahlenmengen** werden in geschweiften Klammern angegeben;
  - $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
  - $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen mit Null
  - $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen
  - $V(3) = \{3; 6; 9; \dots\}$ Menge aller Vielfachen von 3
  - $T\ (48) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$ Menge aller Teiler von 48

- Zahlen, die zu einer Menge gehören, heißen **Elemente** dieser Menge ($\in$ und $\notin$)
  - $9 \in \mathrm{T}(126)$
  - $0 \in \mathbb{N}_0$
  - $14 \notin \mathrm{V}(5)$

- **Rundungsregeln:** Bei 0-4 rechts von der Rundungsstelle abrunden und bei 5-9 aufrunden
  - 587 **4**99 ≈ 587 000 (gerundet auf T)
  - 587 4**9**9 ≈ 587 500 (gerundet auf H)

- **Rechengesetze**
  - Assoziativgesetz der Addition und der Multiplikation (AG)

    $(a + b) + c = a + (b + c)$ z. B. $(275 + 37) + 63 = 275 + (37 + 63)$

    $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ z. B. $(3 \cdot 4) \cdot 25 = 3 \cdot (4 \cdot 25)$

  - Kommutativgesetz der Addition und der Multiplikation (KG)

    $a + b = b + a$ z. B. $265 + 137 = 137 + 265$

    $a \cdot b = b \cdot a$ z. B. $55 \cdot 8 = 8 \cdot 55$

  - Distributivgesetz (Ausklammern und Ausmultiplizieren) (DG)

    $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ z. B. $13 \cdot 12 + 13 \cdot 8 = 13 \cdot (12 + 8)$

    $17 \cdot (10 + 17) = 17 \cdot 10 + 17 \cdot 17$

  - „Klapopustri“ (**Kla**mmern vor **Po**tenz vor **Pu**nkt vor **Stri**ch)

    z. B. $(3^4 + 2\,789) : 35 - 34 \cdot (16^2 - 258) + 14^2$

    $= (81 + 2\,789) : 35 - 34 \cdot (256 - 258) + 196$

    $= 2\,870 : 35 - 34 \cdot (-2) + 196 = 82 + 68 + 196 = 346$

- **Term:**

Einen Rechenausdruck aus Zahlen, Rechenzeichen und ggf. Klammern nennt man **Term.**

- Termarten
- Aufstellen und Gliedern von Termen

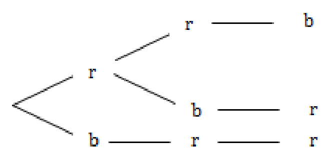
Rechenart	Zugehöriger Term
Addition	**Summe** 7 + 4 = 11 1. Summand, 2. Summand, Wert der Summe
Subtraktion	**Differenz** 7 − 4 = 3 Minuend, Subtrahend, Wert der Differenz
Multiplikation	**Produkt** 4 · 3 = 12 1. Faktor, 2. Faktor, Wert des Produktes
Division	**Quotient** 12 : 4 = 3 Dividend, Divisor, Wert des Quotienten

- **Potenzen**
    - $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{b-mal}}$ (z. B. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$)
    - Bei Zehnerpotenzen gibt der **Exponent** die Anzahl der Nullen an. (z. B. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$)
    - $a^1 = a$ (z. B. $7^1 = 7$)
    - $a^0 = 1$ (z. B. $125^0 = 1$)
    - Quadratzahlen von 1 bis 20 (1;4;9;16;25;36;49;64;81;100;121;144;169;196;225;256;289;324;361;400)

- **Primzahlen**
    - Primzahlen sind Zahlen, die nur durch die Zahl 1 und sich selbst teilbar sind. (2;3;5;7;11;13;17;19;23;...)
    - Primfaktorzerlegung (z. B. $132 = 2 \cdot 66 = 2 \cdot 6 \cdot 11 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$)
    - 1 ist <u>keine</u> Primzahl

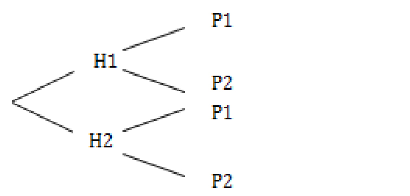
- **Baumdiagramm:**
Bei Fragestellungen, bei denen man mehrmals hintereinander auswählen oder entscheiden muss, kann die Gesamtzahl aller Möglichkeiten mit einem Baumdiagramm bestimmt werden, indem man die Anzahl der verschiedenen Wege durch den Baum zählt.
- **Zählprinzip:**
Liegt ein regelmäßiges Baumdiagramm vor, so ergibt sich die Gesamtzahl der Möglichkeiten auch durch die Multiplikation der Anzahlen der jeweiligen Möglichkeiten bei den Einzelentscheidungen.

Baumdiagramm zum Bauen eines Turms aus zwei roten und einem blauen Bauklotz:



Lösung durch Abzählen: 3 Möglichkeiten

Symmetrisches Baumdiagramm zum Kombinieren von 2 Hosen und 2 Pullovern:



Lösung mit dem Zählprinzip: $2 \cdot 2 = 4$

2. Rechnen mit ganzen Zahlen

- **Betrag:** Der Betrag ist der Abstand von der 0.
    - $|-7| = 7$
    - $|+5| = 5$
- **Anordnung:** b liegt auf der Zahlengeraden rechts von a: $a < b$
    - $-6 > -7$
    - $-165 > -263$
    - $-45 < 23$
- **Addition von ganzen Zahlen**
    - Summanden mit gleichen Vorzeichen: Gemeinsames Vorzeichen, Summenwert der Beträge

      $(+3) + (+5) = 3 + 5 = +8$
      $(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$
    - Summanden mit verschiedenen Vorzeichen: Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag, Differenzwert der Beträge

      $(+3) + (-5) = 3 - 5 = -2$
      $(-3) + (+5) = -3 + 5 = +2$

- **Multiplikation und Division von ganzen Zahlen**

Multipliziere (dividiere) die Beträge der beiden ganzen Zahlen und bestimme dann das Vorzeichen

$(+3) \cdot (+5) = +15$
$(+3) \cdot (-5) = -15$
$(-3) \cdot (+5) = -15$
$(-3) \cdot (-5) = +15$

$$\boxed{\begin{array}{c} + \cdot + = + \\ + \cdot - = - \\ - \cdot + = - \\ - \cdot - = + \end{array}}$$

$(+15) : (+5) = +3$
$(+15) : (-5) = -3$
$(-15) : (+5) = -3$
$(-15) : (-5) = +3$

$$\boxed{\begin{array}{c} + : + = + \\ + : - = - \\ - : + = - \\ - : - = + \end{array}}$$

3. Rechnen mit Größen

Eine Größe (z. B. 739 km) besteht aus einer Maßzahl (739) und einer Maßeinheit (km).

- **Längeneinheiten:**

  1 km = 1 000 m; 1 m = 10 dm; 1 dm = 10 cm; 1cm = 10 mm (z. B. 12 km 3 dm= 120 003 dm)

- **Masseneinheiten:**

  1 t = 1 000 kg   1 kg = 1 000 g   1 g = 1 000 mg (z. B. 7 kg 5 g 18 mg = 7 005 018 mg)

- **Geldeinheiten:**

  1 € = 100 ct (z. B. 50,05 € = 5 005 ct)

- **Zeiteinheiten:**

  1 a = 365 d; 1 d = 24 h; 1 h = 60 min; 1 min = 60 s (z. B. 1 392 h = 58 d)

- **Regeln beim Rechnen mit Größen:**
  - Will man mit zwei Größen rechnen, muss man sie vorher in die gleiche Einheit umrechnen.
    (z. B. $100\text{ km} \cdot 110\text{ m} = 100\,000\text{ m} \cdot 110\text{ m} = 11\,000\,000\text{ m}^2 = 11\text{ km}^2$)
  - Man dividiert eine Größe durch eine Zahl, indem man die Maßzahl der Größe durch die Zahl dividiert und die Maßeinheit beibehält. (Multiplizieren anlalog!)
    (z. B. $45\text{ h }16\text{ min} - 28\text{ h }28\text{ min}) : 8 = (2\,716\text{ min} - 1\,708\text{ min}) : 8 = 1\,008\text{ min} : 8 = 26\text{ min}$)
  - Beim Dividieren zweier Größen mit der gleichen Maßeinheit, fällt die Maßeinheit weg.
    (z. B. $45\text{ h }16\text{ min} - 28\text{ h }28\text{ min}) : 8\text{ min}$
    $= (2\,716\text{ min} - 1\,708\text{ min}) : 8\text{ min} = 1\,008\text{ min} : 8\text{ min} = 126$

- **Maßstab 1:n**
  - Länge in Wirklichkeit = Länge im Plan · n
  - Länge im Plan = Länge in Wirklichkeit : n
    z. B. Maßstab 1:50 000
    1 cm auf der Karte ≙ 50 000 cm in Wirklichkeit
    1 cm auf der Karte ≙ 500 m in Wirklichkeit

- **Dreisatz / Schlussrechnung**

Anwendbar, wenn die Hälfte, das Doppelte, das Dreifache,… einer Größe dem Halben, dem Doppelten, dem Dreifachen,… der anderen Größe entspricht. (z. B. Menge → Preis)

1. Schritt: Schließen auf eine Einheit oder eine geeignete geringere Menge
2. Schritt: Schließen auf ein Vielfaches

4 kg Äpfel kosten 6 €. Wie viel kosten 10 kg?

$$\begin{array}{lcl} & 4\,kg\text{ Äpfel} \mathrel{\widehat{=}} 6\text{ €} & \\ :4 \downarrow & & \downarrow :4 \\ & 1\,kg\text{ Äpfel} \mathrel{\widehat{=}} 1{,}50\text{ €} & \\ \cdot 10 \downarrow & & \downarrow \cdot 10 \\ & 10\,kg\text{ Äpfel} \mathrel{\widehat{=}} 15\text{ €} & \end{array}$$

4. Flächen

- **Umwandlung von Flächeneinheiten**

Umwandlung der Flächeneinheiten ha, a, m^2, dm^2, cm^2, mm^2 mit der Umwandlungszahl 100 und $1\text{ km}^2 = 1\,000\,000\text{ m}^2$
(z. B. $7\text{ ha }9\text{ m}^2 = 70\,009\text{ m}^2$; $40\text{ m}^2\,5\text{ dm}^2 = 400\,500\text{ cm}^2$)

- **Flächeninhalt und Umfang eines Rechtecks**
  - $U_{RE} = 2\cdot(l+b)$; $A_{RE} = l \cdot b$

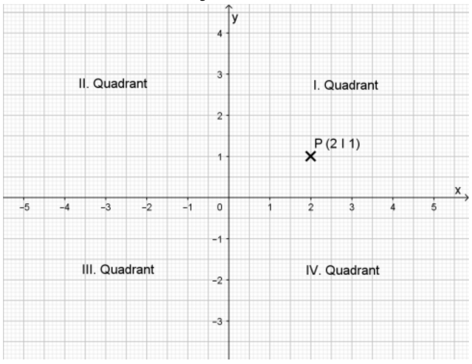
    (z. B. Ein rechteckiges Grundstück ist 42 m lang und hat einen Flächeninhalt von $14\text{ a }70\text{ m}^2$.
    Berechne Breite und Umfang des Grundstücks:
    $b = 1\,470\text{ m}^2 : 42\text{ m} = 35\text{ m}$ $U = 2 \cdot (42\text{m} + 35\text{m}) = 154\text{ m}$)
  - Sonderfall Quadrat mit Kantenlänge a: $U_Q = 4\cdot a$; $A_Q = a^2$

- **Oberflächeninhalt**
  - Oberflächeninhalt eines Quaders: $O_Q = 2\cdot(l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h)$
    (z. B. Ein Quader ist 3 m lang, 2 m breit und 1 m hoch. Berechne seinen Oberflächeninhalt:
    $2 \cdot (3\text{ m} \cdot 2\text{ m} + 3\text{ m} \cdot 1\text{ m} + 2\text{ m} \cdot 1\text{ m}) = 22\text{ m}^2$)
  - Oberflächeninhalt eines Würfels: $O_W = 6 \cdot a^2$

5. Geometrie

- **Koordinatensystem**

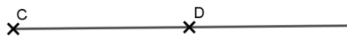
Werden zwei Zahlengeraden senkrecht zueinander angeordnet, erhält man ein **Koordinatensystem.**



- Die waagrechte Achse heißt x-Achse.
- Die senkrechte Achse heißt y-Achse.
- Den Schnittpunkt der beiden Zahlengeraden nennt man Ursprung.
- Ein Punkt P (x | y) ist durch seine Koordinaten festgelegt.

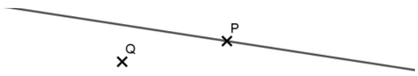
- **Strecken, Geraden und Halbgeraden**
  - Eine **Strecke** $\overline{AB}$ ist von zwei Punkten begrenzt.
    Die **Länge der Strecke** bezeichnet man mit $|\overline{AB}|$.

  - Eine **Halbgerade [CD** (oder ein Strahl) hat einen Anfangspunkt, aber keinen Endpunkt.

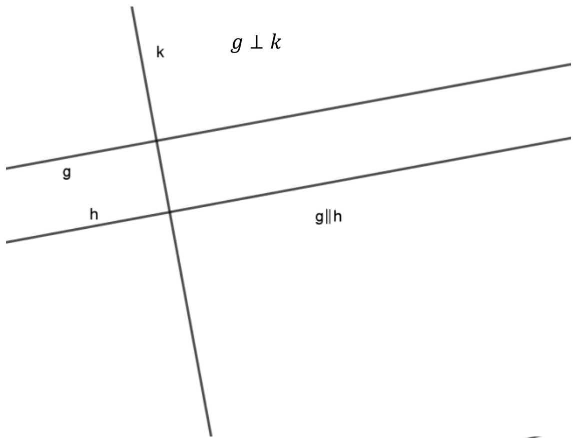


  - Eine **Gerade EF** hat keinen Anfangspunkt und keinen Endpunkt.

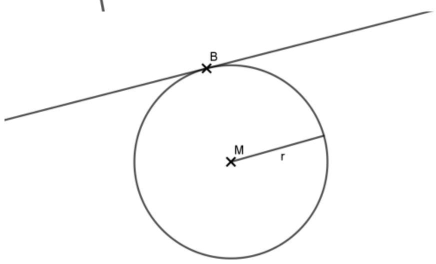
  - Liegt ein Punkt auf einer Geraden g, so schreibt man $P \in g$. Liegt ein Punkt **nicht** auf einer Geraden, so schreibt man $Q \notin g$.



- **Gegenseitige Lage zweier Geraden**
  - Zwei Geraden können sich **schneiden** (Sonderfall: **senkrecht** aufeinander stehen, auch Lot) oder **parallel** verlaufen.
  - **Abstände** von Punkten zu Geraden oder zweier paralleler Geraden misst man immer geradlinig und senkrecht (Länge der Lotstrecke).



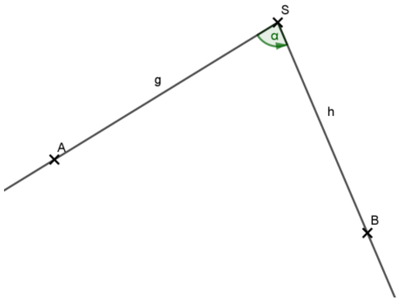
- **Kreis**
  - Alle Punkte eines **Kreises** haben vom Mittelpunkt M den gleichen Abstand. Dieser heißt Radius r des Kreises. Man schreibt: k(M; r).
  - Eine Gerade, die genau einen Punkt B mit dem Kreis gemeinsam hat, heißt **Tangente**.



- <u>**Winkel**</u>

    - Dreht man eine Halbgerade um ihren Anfangspunkt S **gegen** den Uhrzeigersinn, so entsteht ein **Winkel.**

    - S heißt **Scheitel** des Winkels. g und h nennt man **Schenkel** des Winkels.



    - <u>Schreibweise:</u> ∢(g; h) oder ∢ ASB

    - Winkel werden auch oft mit <u>griechischen Buchstaben</u> bezeichnet: zum Beispiel $\alpha = ∢(g; h)$.

    - Man unterscheidet **spitze** Winkel (zwischen 0° und 90°), **stumpfe** Winkel (zwischen 90° und 180°) und **überstumpfe** Winkel (zwischen 180° und 360°).

    - Besondere Winkel sind der **rechte** Winkel mit 90°, der **gestreckte** Winkel mit 180° und der **Vollwinkel** mit 360°.

- <u>**Vierecke**</u>